NOM: COGNOMS: **BLOC A**

1. Una empresa emergent (*Start-up*) especialitzada en el processament de dades afronta unes despeses de funcionament importants durant el seu primer any. Suposem que la incertesa del primer any és una part consubstancial en els ingressos totals de l'empresa. Definim per X la variable aleatòria continua "Ingressos el primer any (en milions d'euros)" i la modelem amb la següent funció de densitat:

$$f(x) = \begin{cases} kx(1-x) & si \quad 0 < x < 1 \\ 0 & en\ qualsevol\ altre\ cas \end{cases}$$

D'altra banda, ens diuen que l'empresa té uns costos fixos operatius de 0,25 milions d'euros durant aquest primer any. El benefici net es defineix, per tant, com els ingressos menys aquests costos fixos. Es demana:

a. El valor de la constant *k* per tal que la funció de densitat sigui vàlida, trobeu la funció de distribució dels ingressos, F(x). **(1 pts).**

Perquè la funció de densitat sigui vàlida, k s'ha de calcular verificant que:
$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 kx(1-x)\,dx = k\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3|_0^1 = \left(\frac{k}{2} - \frac{k}{3}\right) - (0-0) = \frac{k}{6}.\ \frac{k}{6} = 1 \rightarrow \mathbf{k = 6.}$
La funció de distribució: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \int_0^x 6x(1-x)\,dx = 3x^2 - 2x^3, \quad 0 < x < 1 \qquad 0 \quad x \le 0 \qquad 1 \quad x \ge 1.$

b. Quina és la probabilitat que l'empresa tanqui el primer any amb pèrdues (és a dir, que els ingressos no arribin a cobrir els costos fixos)? **(1 pts).**

$$P(X < x) = 3x^2 - 2x^3 = P(X < 0{,}25) = F(0{,}25) = (3 \cdot 0{,}25^2 - 2 \cdot 0{,}25^3) = 0{,}156.$$

c. Calculeu els ingressos esperats i el benefici net de la Start-up. **(1 pts).**

Primer hem de trobar l'esperança de X: $E(X) = \int_0^1 x.\,6x(1-x)\,dx = \frac{1}{3}.\,6x^3 - \frac{1}{4}.\,6x^4|_0^1 = 2 - 1{,}5 = 0{,}5$ m.
Benefici esperat: $E(X) -$ els costos fixos $= 0{,}5 - 0{,}25 = 0{,}25$ m.

2. Un grup de corredors avança del punt E al punt F per una cursa. Al punt E, cada participant es troba en un d'aquests tres estats de salut excloents: Estable (S), Crític (C) o Aturada (A). La distribució dels participants al primer punt mostra que el 85%, el 10% i el 5% dels corredors corren en un estat estable (S), crític (C) i d'alerta d'aturada (A), respectivament. Quan els corredors avancen al punt F, el seu estat canvia segons les probabilitats condicionades següents:

	Punt F	**S**	**C**	**A**
Punt E	**S**	0,85	0,12	0,03
	C	0,20	0,70	0,10
	A	0,40	0,50	0,10

a. Calculeu la probabilitat que un corredor qualsevol es trobi en estat d'aturada quan arribi al punt F. **(1 pts).**

$$P(AF) = P(SE)P(AF|SE) + P(EC)P(AF|EC) + P(AE)P(AF|AE) = 0{,}85 \cdot 0{,}03 + 0{,}1 \cdot 0{,}1 + 0{,}05 \cdot 0{,}1 = 0{,}041.$$

b. Si sabem que un corredor ha entrat en alerta d'aturada al punt F, quina és la probabilitat que hagués passat pel punt E en estat estable (S)? **(1 pts).**

En el punt anterior ja hem calculat la probabilitat total que un corredor entra en alerta d'aturada al punt F, P(AF), i per tant:
$P(SE|AF) = \frac{P(SE)P(AF|SE)}{P(AF)} = \frac{0{,}85 \cdot 0{,}03}{0{,}041} = 0{,}622.$

c. Calculeu la probabilitat de CANVIAR de ritme (canvi d'estat). **(1 pts).**

Sigui R l'esdeveniment "canvi d'estat". Aleshores, la seva probabilitat és:
$P(R) = P(SE)P(CF|SE)+P(SE)P(AF|SE)+P(CE)P(SF|CE)+P(CE)P(AF|CE)+P(AE)P(SE|AE)+P(AE)P(CF|AE)$
$= 0{,}12 \cdot 0{,}85 + 0{,}03 \cdot 0{,}85 + 0{,}2 \cdot 0{,}1 + 0{,}1 \cdot 0{,}1 + 0{,}4 \cdot 0{,}05 + 0{,}5 \cdot 0{,}05 = 0{,}203.$

d. Calculeu la probabilitat que hi hagi un canvi a l'estat Crític (C), sabent que hi ha hagut un canvi d'estat. **(1 pts).**

En el punt anterior, ja hem calculat la probabilitat total de canvi d'estat, P(R), i per tant:

$$P(CE|R) = \frac{P(SE)P(CF|SE)+P(AE)P(CF|AE)}{P(R)} = \frac{0,85\cdot 0,12+0,05\cdot 0,5}{0,203} = 0,626.$$

3. Un autobús de transport de persones viatja des de Sant Andreu de la Barca a Martorell, i torna per la mateixa ruta diàriament. En aquest trajecte hi ha un total de 4 semàfors. Definim les següents variables aleatòries: **X_1**: Nombre de semàfors en vermell que l'autobús troba en el trajecte d'anada. **X_2**: Nombre de semàfors en vermell que troba en el trajecte de tornada. A la dreta tens la taula de probabilitat conjunta de X_1 i X_2.

	X2	0	1	2	3	4
X1	0	0,01	0,01	0,06	0,07	0,01
	1	0,03	0,05	0,08	0,03	0,02
	2	0,03	0,11	0,10	0,01	0,01
	3	0,02	0,07	0,10	0,03	0,01
	4	0,01	0,06	0,05	0,01	0,01

a. Si seleccionem un autobús a l'atzar que fa la ruta d'anada i tornada, quin és el nombre esperat de semàfors en vermell que l'autobús trobarà a l'anada? I a la tornada? **(0,5pts).**

$$E(X_1) = \mu_{x1} = \sum_{\forall k} k.\, p_{x1}(k) = 0\cdot 0,16 + 1\cdot 0,21 + 2\cdot 0,26 + 3\cdot 0,23 + 4. \cdot 0,14 = 1,98$$

$$E(X_2) = \mu_{x2} = \sum_{\forall k} k.\, p_{x2}(k) = 0\cdot 0,1 + 1\cdot 0,3 + 2\cdot 0,39 + 3\cdot 0,15 + 4\cdot 0,06 = 1,77.$$

b. Calcula la probabilitat de trobar més de 2 semàfors en vermell a la tornada si a l'anada n'ha trobat més d'1. **(0,5pts).**

$$P(X1 > 1) = P(X1 = 2) + P(X1 = 3) + P(X1 = 4) = 0,26 + 0,23 + 0,14 = 0,63.$$

$$P(X2 > 2 \cap X1 > 1) = P(X1 = 2 \cap X2 = 3) + P(X1 = 3 \cap X2 = 3) + P(X1 = 4 \cap X2 = 3) + P(X1 = 2 \cap X2 = 4) + P(X1 = 3 \cap X2 = 4) + P(X1 = 4 \cap X2 = 4) = 0,08.$$

$$\mathbf{P(X2 > 2|X1 > 1) = \frac{P(X2>2 \cap X1>1)}{P(X1>1)} = \frac{0,08}{0,63} = 0,127.}$$

c. Quina és la probabilitat que el conductor trobi exactament el mateix nombre de semàfors en vermell a l'anada que a la tornada? **(0,5pts).**

$$P(X1 = X2) = P(X1 = 0 \cap X2 = 0) + P(X1 = 1 \cap X2 = 1) + P(X1 = 2 \cap X2 = 2) + P(X1 = 3 \cap X2 = 3) + P(X1 = 4 \cap X2 = 4) = 0,01 + 0,05 + 0,1 + 0,03 + 0,01 = 0,2.$$

d. Cada semàfor en vermell a l'anada li costa a l'empresa 5€ en combustible i temps, mentre que a la tornada (per ser hores de menys afluència) el cost és de 3€. Calcula el cost esperat diari degut als semàfors i la seva variància ($V(X_1) = 1,64$, $V(X_2) = 1,04$, $COR(X_1, X_2) = -0,188$) **(1,5pts).**

$$E(C) = E(5X1 + 3X2) = 5\cdot 1,98 + 3\cdot 1,77 = 15,21.$$

$$V(C) = V(5X_1 + 3X_2) = 25\cdot 1,64 + 9\cdot 1,04 + 2\cdot 5\cdot 3\left(-0,188\sqrt{1,64}\sqrt{1,04}\right) = 42,99.$$

També es pot calcular l'esperança sumant els costos esperats de totes les interseccions entre l'anada i la tornada, $E(C) = \sum_{\forall(k1,k2)}(5X1 + 3X2)P_{x1,x2}(k1, k2)$. A continuació, aplicant la fórmula $V(C) = E(C^2) - (E(C))^2$ es pot trobar la variància, on $E(C^2) = \sum_{\forall(k1,k2)}(5X1 + 3X2)^2 P_{x1,x2}(k1, k2)$.

NOM: COGNOMS:

Bloc B - Solució

Una línia de metro automàtica, sense conductor (com les L9, L10 i L11 de Barcelona), funciona gràcies a un programari: els trens envien missatges al centre de control i les andanes estan vigilades per càmeres amb un algorisme de visió artificial que detecta objectes a la via. L'equip d'informàtica de la línia vol estudiar el comportament aleatori d'alguns elements del sistema.

1. En un tram de la línia hi ha 20 càmeres. Cada dia, independentment de les altres, el programari de cada càmera s'ha de reiniciar amb probabilitat 0,05.
a) Trobeu l'esperança i la desviació tipus del nombre de càmeres que s'han de reiniciar en un dia. (0,5 punts)

X = "nombre de càmeres que s'han de reiniciar en un dia", $X \sim B(n = 20, p = 0{,}05)$

(20 càmeres, nombre fix d'intents. Cadascuna es reinicia o no, independentment, amb la mateixa p)

$E(X) = n \cdot p = 20 \cdot 0{,}05 = 1$ càmera

$V(X) = n \cdot p \cdot (1 - p) = 20 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}95 = 0{,}95 \rightarrow \sigma(X) = \sqrt{0{,}95} = 0{,}975$ càmeres

b) Calculeu la probabilitat que un dia s'hagin de reiniciar almenys 2 càmeres. (1 punt)

"Almenys 2" pel complementari: $P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)]$

$P(X = 0) = 0{,}95^{20} = 0{,}3585$ $P(X = 1) = C(20,1) \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}95^{19} = 20 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}3774 = 0{,}3774$

$P(X \geq 2) = 1 - 0{,}3585 - 0{,}3774 = 0{,}264$

2. Considereu ara una càmera concreta, i els dies successius.
a) Quina és la probabilitat que passi més d'un mes (30 dies) sense que s'hagi de reiniciar? (0,75 punts)

Y = "nombre de dies fins al primer reinici (comptant el dia del reinici)", $Y \sim Geom(p = 0{,}05)$

Més de 30 dies sense reinici vol dir que els 30 primers dies no hi ha reinici:

$P(Y > 30) = (1 - p)^{30} = 0{,}95^{30} = 0{,}215$

b) Quants dies s'esperen fins al primer reinici? I fins al tercer? (0,75 punts)

$E(Y) = 1/p = 1/0{,}05 = 20$ dies

W = "nombre de dies fins al tercer reinici", $W \sim BN(r = 3, p = 0{,}05)$

$E(W) = r/p = 3/0{,}05 = 60$ dies

3. Els trens envien al centre de control missatges d'alerta de baixa prioritat de manera aleatòria, amb una mitjana de 6 missatges per hora.
a) Quina és la probabilitat que en mitja hora arribin exactament 4 missatges? (0,75 punts)

M = "nombre de missatges en 1 hora", $M \sim P(\lambda = 6)$

M_{30} = "nombre de missatges en 30 minuts", $M_{30} \sim P(\lambda = 6 \cdot 0{,}5 = 3)$

$P(M_{30} = 4) = e^{-3} \cdot 3^4/4! = 0{,}0498 \cdot 81/24 = 0{,}168$

b) Quina és la probabilitat que en 20 minuts n'arribin més de 2? (0,75 punts)

M_{20} = "nombre de missatges en 20 minuts", $M_{20} \sim P(\lambda = 6 \cdot 20/60 = 2)$

$P(M_{20} > 2) = 1 - [P(0) + P(1) + P(2)] = 1 - e^{-2} \cdot (1 + 2 + 2^2/2)$

$= 1 - 5 \cdot e^{-2} = 1 - 0{,}677 = 0{,}323$

4. Fa 15 minuts que no arriba cap missatge d'alerta i l'operador del centre de control pensa que ja n'ha d'arribar un aviat. Quina és la probabilitat que encara hagin de passar més de 10 minuts sense cap missatge? Té raó l'operador? Justifiqueu-ho. (1 punt)

T = "temps (en minuts) fins al proper missatge", $T \sim \text{Exp}(\lambda = 6/60 = 0{,}1$ missatges per minut)

Volem $P(T > 25 \mid T > 15)$. Per la propietat de no memòria de l'Exponencial:

$P(T > 25 \mid T > 15) = P(T > 25)/P(T > 15) = e^{(-0{,}1\cdot 25)}/e^{(-0{,}1\cdot 15)} = e^{(-0{,}1\cdot 10)} = P(T > 10) = e^{-1} = 0{,}368$

L'operador no té raó. Per la falta de memòria, el temps que ja s'ha esperat no canvia res: la probabilitat d'esperar 10 minuts més és de 0,368, la mateixa que si acabés d'arribar un missatge. Que faci estona que no n'arriba cap no fa que n'hagi d'arribar un aviat.

5. Un dia, una avaria del sistema automàtic obliga a fer funcionar la línia en mode manual, amb un conductor a cada tren. Anomenem X el temps d'un tram, en segons: des que el tren arriba a una estació fins que arriba a la següent, comptant-hi l'obertura de portes, la sortida i l'entrada de passatgers (en aquest ordre: som cívics), el tancament de portes i el recorregut fins a l'estació següent. En mode manual, X segueix una distribució Normal de mitjana 95 s i desviació tipus 5 s. (*Els càlculs amb el model Normal cal que els formalitzeu en termes de la Normal estàndard*)
a) Quina és la probabilitat que un tram es faci entre 90 i 100 segons? (1 punt)

$X \sim N(\mu = 95, \sigma = 5)$. Estandarditzem amb $Z = (X - 95)/5 \sim N(0, 1)$:

$P(90 < X < 100) = P((90 - 95)/5 < Z < (100 - 95)/5) = P(-1 < Z < 1)$

$= \Phi(1) - \Phi(-1) = \Phi(1) - (1 - \Phi(1)) = 2\cdot\Phi(1) - 1 = 2\cdot 0{,}84134 - 1 = 0{,}683$

b) El sistema marca un tram com a "retardat" si dura més d'un cert llindar, i es vol que això passi només el 2,5% de les vegades. Quin ha de ser el llindar? (1 punt)

Busquem el llindar x tal que $P(X > x) = 0{,}025$, és a dir, $P(X \le x) = 0{,}975$

$P(Z \le (x - 95)/5) = 0{,}975 \rightarrow (x - 95)/5 = z_{0{,}975} = 1{,}96$; $x = 95 + 1{,}96\cdot 5 = 104{,}8$ segons

6. Un trajecte complet de la línia té 25 trams. Suposeu que, en mode manual, els temps dels trams són independents, amb mitjana 95 s i desviació tipus 5 s cadascun. Quina és la probabilitat que un trajecte complet duri més de 40 minuts? (1,5 punts)

$S = X_1 + X_2 + \ldots + X_{25}$ = "temps total del trajecte en mode manual, en segons"

$E(S) = 25\cdot 95 = 2375$ s

$V(S) = 25\cdot 5^2 = 625$ (independència: les variàncies se sumen) $\rightarrow \sigma(S) = \sqrt{625} = 25$ s

Els trams són Normals i independents, per tant S també és Normal. $S \sim N(2375, 25)$

40 minuts = 2400 s. $P(S > 2400) = P(Z > (2400 - 2375)/25) = P(Z > 1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0{,}84134 = 0{,}159$

7. L'equip vol estimar el temps mitjà d'un tram en mode manual fent la mitjana de n trams observats. Quin és el nombre mínim de trams que cal observar perquè, amb probabilitat 0,95, la mitjana mostral no s'allunyi més de 2 segons del valor esperat? (1 punt)

$\bar{X}_n$ = "temps mitjà de n trams" $\sim N(95, 5/\sqrt{n})$

Volem $P(|\bar{X}_n - 95| < 2) \ge 0{,}95$, és a dir, $P(-2/(5/\sqrt{n}) < Z < 2/(5/\sqrt{n})) \ge 0{,}95$

Per simetria, el 5% restant es reparteix 2,5% a cada cua: $2/(5/\sqrt{n}) \ge z_{0{,}975} = 1{,}96$

$\sqrt{n} \ge 1{,}96\cdot 5/2 = 4{,}9 \rightarrow n \ge 4{,}9^2 = 24{,}01$. Cal arrodonir cap amunt: n = 25 trams

Fórmula equivalent: $n \ge (z\cdot\sigma/e)^2 = (1{,}96\cdot 5/2)^2 = 24{,}01$.